جامعة البعث — امتحان الدورة الاضافية (مرسوم) ٢٠١٤-٢٠١٥ — المدة : ساعة ونصف
كلية العلوم — أسئلة مقرر التحليل التابعي (١) — العلامة : (١٠٠) درجة
قسم الرياضيات — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي — الاسم :

السؤال الأول (٢٠درجة) :

أ)- أثبت أن فضاء التوابع المستمرة $C[0,1]$ غير تام مع المسافة $d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt$.

ب)- بين فيما اذا كان التابع $K(x)=|\arctan x|$ يعرف نظيما في $\mathbb{R}$ ، ثم خذ التابع $g(x)=\arctan x$ واكتبه على شكل تكامل ليبغ على الفترة $[0,1]$ واستنتج انه مستمر مطلقاً وذو تغيرات محدودة على هذه الفترة و ما هي عبارة المسافة في الفضاء $BV[a,b]$ (ذكراً فقط) .

السؤال الثاني (٢٠ درجة) :

أ)- ماذا نقصد بالفضاء $L_\infty[0,1]$ وما هو شكل النظيم فيه. ثم أثبت أن $d(x,y)=Vrai\max|x(t)-y(t)|$ تحقق الموضوعة الثالثة (متباينة المثلث) من موضوعات المسافة ، حيث $x(t),y(t)\in X$ و X مجموعة التوابع القيوسة على $[0,1]$.

ب)- اذا كان الجداء الديكارتي $X\times Y$ فضاء خطياً حيث $X \& Y$ فضاءات خطية منظمة ، أثبت تكافؤ النظيمين : $\|(x,y)\|_1=\max\{\|x\|,\|y\|\}$ و $\|(x,y)\|_2=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$.

السؤال الثالث (٢٠ درجة) :

أ)- اذكر نص مبرهنة باناخ (دون اثبات) وهل التطبيق $f:[0,1]\to[0,1]$ حيث $f(x)=x^2$ ضاغطاً أم لا ؟ ولماذا ؟ وما هي النقاط الثابتة له .

ب)- اذا كان x,y عنصران من فضاء هيلبرت H فأثبت أن :

$$x\perp y \Rightarrow \|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\| \quad ; \quad \alpha\in\mathbb{C}$$

السؤال الرابع (٢٠درجة) :

بفرض أن H فضاء هيلبرت العقدي . $T\in B(H)$ أثبت أن:

(a) TT^*, T^*T مترافقين ذاتياً.

(b) إذا كان $T=R+iS$ فإن S, R مترافقان ذاتياً.

السؤال الخامس (٢٠ درجة) :

المحدودية لا تقضي الانغلاق للمؤثرات الخطية كما أن الانغلاق لايقضي المحدودية (أوالاستمرار) وضح ذلك بالأمثلة ، وناقش الحالات التي من أجلها يتحقق الاقتضاء بين المحدودية والاغلاق للمؤثرات الخطية.

حمص في ٢٣ / ٨ / ٢٠١٥م. — انتهت الأسئلة — مدرسا المقرر

مع التمنيات بالنجاح والتوفيق — الدكتور سامح العرجة و الدكتور محمد عامر

جامعة البعث — امتحانات الدورة الاضافية مرسوم ٢٠١٤-٢٠١٥ — المدة : ساعة و نصف
كلية العلوم — سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١) — العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

جواب السؤال الأول (٢٠درجة) :

أ)- لنأخذ فضاء التوابع المستمرة $C[0,1]$ ولنعرف عليه المسافة : $d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt$

ولنبين أن الفضاء $C[0,1]$ غير تام مع هذه المسافة .

لتكن $\{x_n(t)\}$ متتالية من التوابع من الفضاء $C[0,1]$ معطاة بالشكل :

$$x_n(t)=\begin{cases} 0 & ; \quad 0\le t\le \frac{1}{2} \\ n\left(t-\frac{1}{2}\right) & ; \quad \frac{1}{2}\le t\le \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ 1 & ; \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\le t\le 1 \end{cases}$$

إن هذه المتتالية هي متتالية كوشي، بمفهوم المسافة المعرفة أعلاه. في الواقع من أجل أي عدد قطر $\varepsilon>0$ يكون: $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ من أجل $m,n>\frac{1}{\varepsilon}$ وتمثل المسافة في هذه الحالة مساحة المثلث المبين في الشكل أدناه.

لنبين أن هذه المتتالية ليست متقاربة إلى تابع من الفضاء $C[0,1]$.

لنفرض جدلاً أن $\{x_n(t)\}$ متقاربة إلى عنصر $x(t)$ من $C[0,1]$، عندئذٍ يكون:

$$d(x_n,x)=\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|dt$$

$$=\int_0^{1/2} |x(t)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1/2+\frac{1}{n}} |x_n(t)-x(t)|dt+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1-x(t)|dt$$

وبما أن التوابع المستكملة غير سالبة، فإن كلاً من التكاملات في الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة تكون أيضاً غير سالبة ، وبالتالي فإن العلاقة $d(x_n,x)\longrightarrow 0$ تقتضي أن يقترب كل من التكاملات إلى الصفر وبما أن $x(t)$ تابع مستمر فيجب أن يكون:

$$x(t)=0 \quad ; \quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$$

$$x(t)=1 \quad ; \quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$$

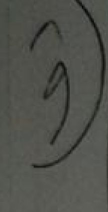
وهذا غير ممكن من أجل تابع مستمر وبالتالي فإن $\{x_n(t)\}$ لا يمكن لها أن تتقارب إلى تابع ينتمي إلى $C[0,1]$ أي الفرض الجدلي خاطىء وهذا بدوره يؤدي إلى أن الفضاء $C[0,1]$ غير تام بالنسبة للمسافة المعرفة أعلاه .

ب)- التابع K يعرف نظيم أم لا في $\mathbb{R}$: نلاحظ أن الشرطين الأول والثاني من شروط النظيم محققة حيث أن :

١)- $\|x\|\geq 0$ وهذا محقق وأضف أن $\|x\|=0$ اذا كانت $x=\theta$.

٢)- $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ وهو محقق كالقيمة المطلقة .

٣)- بينما الشرط $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ غير محقق لأنه لو أخذنا $x=\sqrt{3}$ و $\lambda=\frac{1}{3}$ لوجدنا:



$$\|\lambda x\|=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6} \qquad (1)$$

من جهة ثانية لدينا :

$$|\lambda|\,\|x\|=\frac{1}{3}arc\tan\sqrt{3}=\frac{1}{3}.\frac{\pi}{3} \qquad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن الشرط الثالث غير محقق اذ ليس نظيما في $\mathbb{R}$.

- لدينا $g(x)=\arctan x$ يكتب بالشكل :

$$g(x)=\arctan x=g(0)+\int_0^x\frac{dt}{1+t^2} \;;\; x>0 \;\; (x\in[0,1])$$

وهذا ليس الا تكامل ليبغ على $[0,1]$ مع أن $\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}<\infty$. وهذا التابع مستمر مطلقاً لانه كتب على هذه الصورة على $[0,1]$ وكل مستمر مطلقاً هو ذ.ت.م. حسب مبرهنة على نفس الفترة ، أما العبارة المطلوبة فهي : $d(f,g)=|f(a)-g(a)|+\overset{b}{\underset{a}{v}}(f-g)$ حيث $\overset{b}{\underset{a}{v}}(f)$ التغير الكلي لـ f على $[a,b]$.

جواب السؤال الثاني (٢٠درجة) :

أ)- هو الفضاء الذي يشمل مجموعة كل التوابع المحدودة والقابلة للقياس على المجال $[0,1]$. وشكل النظيم فيه $\|f\|_{L_\infty}=\underset{x\in[a,b]}{ess\sup}|f(x)|=\inf\{C:\lambda(x\in[a,b]:|f(x)|\geq C)=0\}$.

لنعرّف المسافة التالية :

$$d'(x,y)=0\Rightarrow \sup|x(t)-y(t)|\geq 0$$



عندئذ نجد :

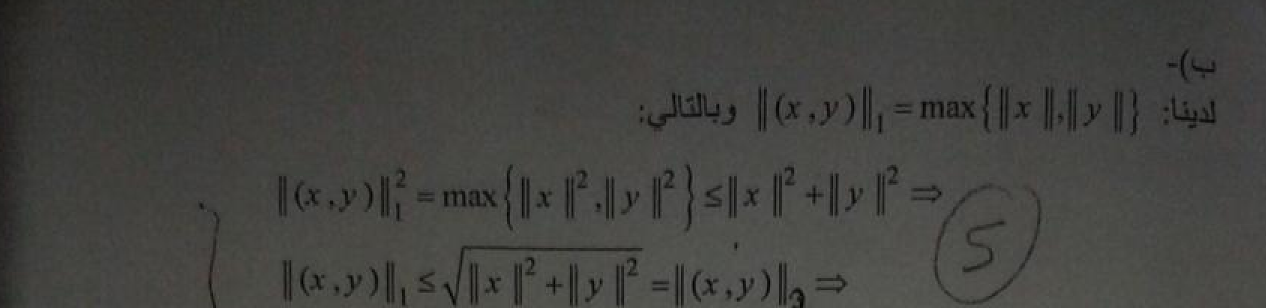
$$d'(x,y)=\sup|x(t)-y(t)|=\sup|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|\leq$$

$$\leq\sup|x(t)-z(t)|+\sup|z(t)-y(t)|$$



$$\Rightarrow d'(x,y)\leq d'(x,z)+d'(z,y)$$

وبالتالي $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$:



ب)-

لدينا: $\|(x,y)\|_1 = \max\{\|x\|,\|y\|\}$ وبالتالي:

$$\|(x,y)\|_1^2 = \max\{\|x\|^2,\|y\|^2\} \le \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow$$
$$\|(x,y)\|_1 \le \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} = \|(x,y)\|_2 \Rightarrow$$
$$\|(x,y)\|_1 \le \|(x,y)\|_2$$

كما لدينا :

$$\|(x,y)\|_2^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \le 2\max\{\|x\|^2,\|y\|^2\}$$
$$\|(x,y)\|_2 \le \sqrt{2}\max\{\|x\|,\|y\|\} = \sqrt{2}\|(x,y)\|_1 \Rightarrow$$
$$\|(x,y)\|_2 \le \sqrt{2}\|(x,y)\|_1$$

وبالتالي فإنّ $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ متكافئتان.

جواب السؤال الثالث (٢٠درجة) :

أ)- بفرض أنّ (X,d) فضاء متري تام ، و A تطبيق ضاغط من الفضاء في نفسه، عندئذٍ التطبيق الضاغط A يملك نقطة ثابتة وحيدة .

التطبيق $f(x)=x^2$ معرّف من $[0,1]$ الى $[0,1]$ وله مشتق محدود $|f'(x)|=|2x|\le 2$ على $[0,1]$ ثم أنه يحقق الشرط : $d(x^2,y^2)=|x^2-y^2| \le \alpha|x-y|$ أي: $d(x^2,y^2)\le \alpha d(x,y)$ وهذا يعني أنه ضاغط ، ونقاطه الثابتة هي الصفر والواحد .

ب)- $(\Rightarrow)$: $x \perp y \Rightarrow \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = 0$ وبالتالي لدينا:

$$\bullet \|x+\alpha y\|^2 = \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \|x\|^2 + |\alpha|^2.\|y\|^2 + \alpha\langle y,x\rangle + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + |\alpha|^2.\|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\underbrace{\alpha\langle x,y\rangle}_{=0} = \|x\|^2 + |\alpha|^2.\|y\|^2$$

$$\bullet \|x-\alpha y\|^2 = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle = \|x\|^2 + |\alpha|^2.\|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\underbrace{\alpha\langle x,y\rangle}_{=0}$$
$$= \|x\|^2 + |\alpha|^2.\|y\|^2$$

لذلك فإن : $\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|$.

جواب السؤال الرابع (٢٠درجة) :

(a) $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$ وبالتالي T^*T مترافق ذاتياً.

$$(T^*T)^* = T^{**}T^* = TT^*$$

(b) بفرض أن $R=\frac{1}{2}(T+T^*)$, $S=\frac{1}{2i}(T-T^*)$ عندئذٍ: $T = R + iS$

كما أن : $R^* = \frac{1}{2}(T+T^*)^* = \frac{1}{2}(T^*+T) = R$

وبالتالي R مترافق ذاتياً.

5 $$S^* = \frac{-1}{2i}(T - T^*)^* = \frac{-1}{2i}(T^* - T^{**}) = \frac{1}{2i}(T - T^*) = S$$

وبالتالي S مترافق ذاتياً.

جواب السؤال الخامس (٢٠درجة) :

المحدودية لا تقضي الانغلاق للمؤثرات الخطية كما أن الانغلاق لايقضي المحدودية (أوالاستمرار) وضح ذلك بالأمثلة ، وناقش الحالات التي من أجلها يتحقق الاقتضاء بين المحدودية والاغلاق للمؤثرات الخطية.

الانغلاق لايقضي المحدودية (أوالاستمرار) :

المؤثر A حيث: $D(A) \subseteq C[0,1]$; $A : D(A) \longrightarrow C[0,1]$

فمن المعروف أن المؤثر التفاضلي المعرف بالشكل: $Ax(t) = x'(t)$; $x(t) \in D(A), t \in [0,1]$

حيث هنا $x' = x'(t)$ مشتق التابع المستمر $x'(t)$.

هذا المؤثر مغلق. فمن أجل إثبات ذلك لنأخذ المتتالية $D(A) \supseteq \{x_n\}$ بحيث تكون المتتالية $\{x_n\}$ والمتتالية $\{Ax_n\}$ متقاربتين أي ليكن:

5

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \& \quad y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x'_n(t)$$

وبما أن التقارب بالنظيم في $C[0,1]$ هو تقارب منتظم على المجال $[0,1]$ عندئذٍ يكون:

$$\int_0^t y(\tau)d\tau = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x'_n(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty}\int_0^t x'_n(\tau)d\tau$$
$$= x(t) - x(0)$$

أي أن:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)d\tau$$

وهذا يعني أن $D(A) \ni x(t)$ وأن $x'(t) = y$ وبالتالي نستنتج أن A مغلق.

إن المؤثر A هذا معرف على مجموعة جزئية من الفضاء $C[a,b]$ وليس على كل هذا الفضاء ، حيث $D(A)$ تمثل مجموعة التوابع المستمرة والقابلة للاشتقاق والتي مشتقاتها مستمرة على المجال $[a,b]$.

من الواضح أن A خطي، ولكنه غير مستمر. فمثلاً لو أخذنا المتتالية $\{f_n(x)\}$ من التوابع المستمرة على المجال $[a,b]$ حيث :

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \; ; \; n = 1,2,.... \quad و \quad x \in [a,b]$$

لوجدنا أن $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ولكن المتتالية $\{Af_n(x)\}$ حيث:

$$Af_n(x) = \cos nx \; ; \; n = 1,2,....$$

متتالية غير متقاربة اذن المؤثر غير محدود (مستمر).

(اذا ذكر الطالب أي مثال لمؤثر غير محدود ولكنه مغلق يحصل على علامة هذا الجزء من السؤال) .

5 **المحدودية لا تقتضي الانغلاق:**

لنأخذ في الفضاء ℓ_2 المؤثر S حيث :

$$Se_n = ne_1 \quad ; \quad e_n = (\underbrace{0,0,...,0,1}_{n},0,0,....) \; , \; n = 1,2,3,...$$

من الواضح إن $D(S)$ هي المتتالية e_n ، وإن النقاط $(\frac{e_n}{n},e_1)$ تنتمي لبيان المؤثر S وبذلك فإن $(0,e_1)$ نقطة من لصاقة البيان أي من $\overline{G(S)}$. بمعنى آخر $\lim_{n\to\infty}\frac{e_n}{n}=0$ وإن $0\notin D(S)$ أي أن خاصة المؤثر الخطي المغلق غير محققة من أجل هذا الاختيار وبالتالي S غير مغلق.

أو :

اذا أخذنا المؤثر I (المؤثر المطابق) من الفضاء الخطي المنظم E في نفسه، فمن المعروف أن المؤثر المطابق خطي ومحدود إلا أنه غير مغلق وذلك لو أخذنا المتتالية $D(I)\supset\{x_n\}$ متقاربة من عنصر x حيث x من $\{E-D(I)\}$ لوجدنا أن خاصة المؤثر الخطي المغلق غير محققة من أجل هذا الاختيار وبالتالي I غير مغلق.

الاقتضاء بين المحدودية والاغلاق للمؤثرات الخطية.

اذا كان B_1 و B_2 فضاءي باناخ وبفرض المؤثر T حيث:

$$T:D(T)\longrightarrow B_2\ ;\ D(T)\subset B_1$$

مؤثراً خطياً مغلقاً، **إذا كانت** $D(T)$ مغلقة في B_1 عندئذٍ يكون المؤثر T محدوداً.

5

حمص في ٢٣ / ٨ / ٢٠١٥م.

انتهت الأجابات

مدرسا المقرر

الدكتور سامح العرجة و الدكتور محمد عامر